

## AL DI LÀ DEI LIMITI DELLA TEORIA CLASSICA DELL'ELASTICITÀ (\*)

(Con quattro figure)

GUSTAVO COLONNETTI

*Accademico Pontificio*

SUMMARIVM. — Auctor, perhibens quomodo suae investigationes de elastoplasticorum corporum statica peragantur, declarat eam suam ratio differat a rationibus quas alii Auctores de eadem re inquirentes adhibere solent.

Ogni deformazione (sia pur piccolissima) di un corpo naturale può sempre riguardarsi come composta di due parti: l'una *elastica* che scompare al cessar delle cause che l'hanno prodotta; l'altra *plastica* che permane anche dopo che quelle cause hanno cessato di agire.

Nella maggior parte dei corpi naturali, fino a che la sollecitazione non oltrepassa un certo limite, la prima parte del fenomeno prevale, e la deformazione plastica si mantiene trascurabile rispetto alla deformazione elastica.

Questo limite — detto *limite di elasticità* — varia naturalmente da corpo a corpo; esso non ha d'altronde che un valore convenzionale, che dipende dalla precisione dei nostri mezzi di osservazione e dal grado di approssimazione che vogliamo raggiungere.

Sta però di fatto, in ogni caso, che, al di là di detto limite, le deformazioni plastiche non potranno più venir trascurate e la teoria classica dell'elasticità, che da esse prescinde, non potrà più venire applicata.

Le esigenze, rapidamente crescenti, della tecnica moderna hanno pertanto posto il problema delle nuove ipotesi che occorre introdurre

---

(\*) Nota presentata nella Tornata dell'8 giugno 1941.

e delle varianti che dovranno in conseguenza venir apportate alla teoria, per tener conto della presenza del fenomeno plastico.

\* \* \*

Il problema è stato, in questi ultimi tempi, affrontato per vie diverse da diversi autori, i quali però si sono generalmente occupati più della sua impostazione analitica che dell'aspetto fisico della questione<sup>(1)</sup>.

Qui io vorrei richiamar l'attenzione sopra certi risultati dell'esperienza che non possono e non debbono venir persi di vista, in quanto delimitano nettamente e definitivamente il campo delle nostre possibili indagini.

Ciò varrà, se io non mi inganno, a giustificare la particolare impostazione che io ho data ai miei studi sull'argomento<sup>(2)</sup>, ed a chiarire le ragioni per cui credo di dover insistere in essa.

\* \* \*

Premetto che, in queste indagini, io continuerò a supporre che le deformazioni siano piccolissime rispetto alle dimensioni del corpo, e

---

(1) Alludo in modo particolare ai recenti lavori di:

P. LOCATELLI, *Sopra il teorema del minimo lavoro per corpi non perfettamente elastici*, R. Accademia d'Italia 1939; *Estensione del teorema di Castigliano*, R. Istituto Lombardo 1939; *Estensione, flessione, torsione di corpi elasto plastici*, R. Istituto Lombardo 1940; *Estensione del principio di St. Venant a corpi non perfettamente elastici*, R. Accademia delle Scienze di Torino 1940; *Ancora sul principio di St. Venant per corpi non perfettamente elastici*, R. Accademia delle Scienze di Torino 1941.

B. FINZI, *Principio variazionale nella meccanica dei continui*, R. Accademia d'Italia 1940; *Il problema ristretto tridimensionale nella teoria della plasticità*, R. Accademia delle Scienze di Torino 1941.

M. PASTORI, *Il problema delle distorsioni nei corpi imperfettamente elastici*, R. Istituto Lombardo 1940; *Le distorsioni nei mezzi elasto plastici del Colonnetti*, R. Istituto Lombardo 1940.

(2) Cfr. G. COLONNETTI, *Su l'equilibrio elastico dei sistemi in cui si verificano anche deformazioni non elastiche*, R. Accademia Nazionale dei Lincei, 1937; *Incrudimento ed isteresi elastica nel quadro della nuova teoria dell'equilibrio elasto plastico*, Pontificia Accademia Scientiarum, « Commentationes », 1938; *La statica dei corpi elasto plastici*, Pontificia Accademia Scientiarum, « Commentationes », 1938; *Alla ricerca dei fondamenti sperimentali della teoria dell'equilibrio elasto plastico*, R. Accademia Nazionale dei Lincei, 1938.

Ovvero: G. COLONNETTI, *Scienza delle costruzioni*, Torino (Einaudi), 1941.

che esse possano perciò venire nei calcoli riferite alla configurazione iniziale del sistema come se questo non si fosse mai deformato.

È noto che, nel campo delle deformazioni elastiche, questa ipotesi conduce direttamente alla formulazione della legge di Hooke, vale a dire alla proporzionalità fra forze e deformazioni.

Nel campo delle deformazioni plastiche le cose devono invece andare ben diversamente.

L'esperienza dimostra infatti che la deformazione plastica di un elemento materiale non è, generalmente parlando, determinata dalla sollecitazione a cui l'elemento stesso è *attualmente* soggetto, ma dipende dalle sollecitazioni a cui esso è stato assoggettato in precedenza (e precisamente: dalla loro grandezza, dalla durata della loro azione, dall'ordine con cui si sono succedute).

È quindi, a parer mio, da considerarsi come non rispondente a realtà qualsiasi tentativo di studiare le deformazioni plastiche di un elemento come delle funzioni (più o meno complesse poco importa) della sollecitazione *attuale* dell'elemento stesso.

La cosa potrebbe tutt'al più avere un senso quando, in virtù di particolari convenzioni, la successione delle sollecitazioni precedenti potesse intendersi implicitamente definita dalla sollecitazione attuale. Ma un tal modo di procedere potrà bensì venire utilizzato nella trattazione di qualche caso particolare; non potrà mai condurre ad una soluzione generale del problema.

In linea di massima sembra più conforme alla realtà delle cose il considerare la deformazione plastica di ciascun elemento come indipendente dalla sollecitazione attuale dell'elemento stesso, e condizionata soltanto alla circostanza che la sollecitazione abbia (attualmente o precedentemente) raggiunto il limite di elasticità del materiale.

\* \* \*

Questo modo, apparentemente semplicistico, di impostare il problema è indubbiamente sufficiente quando la deformazione plastica è preesistente (epperò fa parte dei dati del problema) e si tratta soltanto di studiarne l'influenza sul regime statico determinato da una sollecitazione che sopravviene in seguito e che non raggiunge il limite

di elasticità del materiale — sicchè l'andamento del fenomeno si può rappresentare con un diagramma del genere di quello disegnato in figura 1.

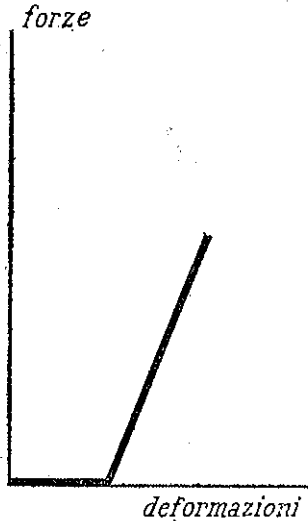


FIG. 1.

Ma quando si tratta invece di studiare il modo con cui la deformazione plastica si genera (sovrapponendosi alla deformazione elastica) sotto l'azione di una sollecitazione che tocca il limite di elasticità del materiale — per modo che l'andamento del fenomeno viene a doversi rappresentare con un diagramma del tipo di quello disegnato in figura 2 — debbo convenire che, alla mia impostazione del problema, può ragionevolmente farsi qualche obbiezione.

Il diagramma di cui si tratta rappresenta infatti un comportamento molto particolare, il quale non trova riscontro in pratica se non nel caso di certi metalli (come il ferro omogeneo o l'acciaio dolce) che, al limite di elasticità, presentano fenomeni di snervamento molto netti e ben definiti.

È stato poi anche osservato che, nei corpi omogenei, un tale comportamento implica una distribuzione di tensioni uniforme in tutte le regioni in cui si sono verificate delle deformazioni plastiche, cioè

che non è compatibile colle equazioni dell'equilibrio per forze di massa non tutte nulle.

Ma l'ipotesi della perfetta omogeneità non ha notoriamente che il valore di una pura e semplice astrazione.

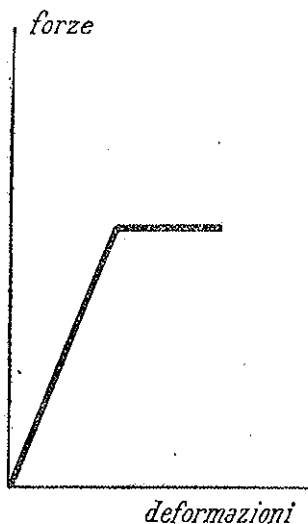


FIG. 2.

Nessun corpo naturale è, a rigore, omogeneo.

Vien quindi fatto di chiedersi se non convenga, nella teoria, sostituire a questa ipotesi astratta quella, più conforme a verità, di una ragionevole eterogeneità del materiale.

In realtà ogni difficoltà scompare se — come io ho già avuto, altra volta, occasione di suggerire — si conviene di considerare i corpi naturali come aggregati regolari di elementi dotati di limiti di elasticità differenti, opportunamente scalati tra due valori estremi ben definiti.

In queste condizioni accade infatti che, quando un elemento raggiunge il suo limite di elasticità, esso cessa di arrecare nuovi contributi alla resistenza dell'insieme, e si limita a secondare, deformandosi plasticamente, le deformazioni elastiche degli elementi attigui, a limite di elasticità più elevato; nei quali soltanto, a partire da quel momento,

si verificheranno quegli incrementi di tensioni interne che sono necessari per equilibrare gli ulteriori incrementi della sollecitazione.

In un certo senso si può dire che le tensioni interne emigrano, man mano che se ne presenta la necessità, dagli elementi che hanno toccato il limite delle loro possibilità di prestazione, a quelli che posseggono ancora un margine più o meno largo di resistenza.

Ne segue che in questi elementi (i quali, al crescere della sollecitazione, si van facendo sempre meno numerosi) l'accrescimento delle

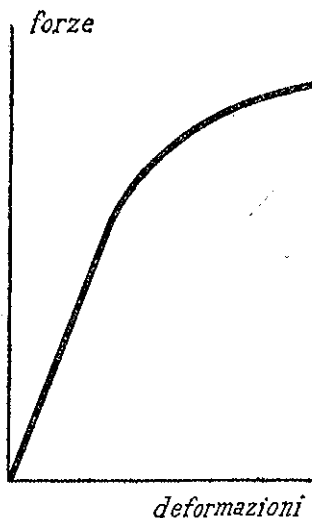


FIG. 3.

tensioni, e quindi anche delle deformazioni elastiche, si farà sempre più rapido.

Il diagramma « forze-deformazioni » si incurverà pertanto verso l'asse delle deformazioni assumendo un andamento — del genere di quello rappresentato in figura 3 — del tutto conforme a quello che l'esperienza ci rivela nella maggior parte dei materiali naturali.

\* \* \*

Se poi il diagramma « forze-deformazioni » è noto (come accade, per esempio, quando esso è stato, su di un dato materiale, rilevato sperimentalmente) la legge secondo cui, in quel materiale, varia da

punto a punto il limite di elasticità — o, ciò che fa lo stesso, la legge, secondo cui, al crescere della sollecitazione, i singoli suoi elementi passano allo stato plastico — può considerarsi come determinata in conseguenza.

Si consideri infatti il fascio dei raggi uscenti dal polo arbitrario P ed aventi le direzioni delle successive tangenti al diagramma; e lo si immagini intersecato da una qualsiasi parallela all'asse delle forze (fig. 4).

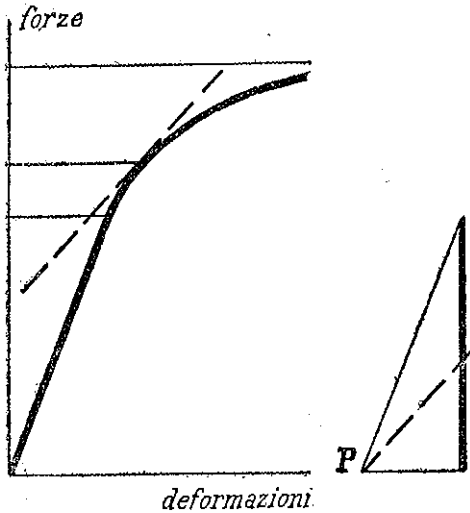


FIG. 4.

È facile constatare che l'ordinata intercetta su tale retta dal raggio corrispondente alla fase elastica del fenomeno viene, da uno qualunque degli altri raggi del fascio, divisa in parti proporzionali ai numeri degli elementi che, pel corrispondente valore della sollecitazione, si trovano rispettivamente in regime elastico ed in regime plastico.

Si arriva così a trarre, dal diagramma « forze-deformazioni » rilevato sperimentalmente, una vera e propria *definizione strutturale* del materiale, la quale giustifica e, in un certo senso, spiega la comparsa progressiva delle deformazioni plastiche e rende ragione dei fenomeni di incrudimento che le accompagnano.

Una conclusione si impone, ed è questa: che per tentar di interpretare il fenomeno plastico non giova sostituire alla classica legge di Hooke una legge non lineare la quale rappresenti più o meno bene l'andamento del fenomeno della deformazione per sollecitazioni gradatamente crescenti.

Bisogna invece, prima di tutto, rinunciare alla reversibilità del fenomeno, vale a dire alla biunivocità della corrispondenza tra forze e deformazioni.

Dopo di che — se si resta nel campo delle deformazioni piccolissime — non è neppur più necessario rinunciare alla linearità del legame. Ai fini che qui ci proponiamo è infatti pienamente sufficiente che quel legame, pur restando lineare, cessi di essere omogeneo.