ACTA
Vol. IV - N. 27

SUR LES BASES DÉNOMBRABLES DES FAMILLES DE FONCTIONS (*)

W. SIERPIŃSKI

SVMMARIVM. — A. determinat novas proprietates classium functionum unius realis variabilis, quarum infinita sit talis functionum consecutio ut unaquaeque functio sit limes alicuius consecutionis ex illa consecutione extractae.

F étant une famille quelconque de fonctions d'une variable réelle, nous dirons qu'elle admet une *base dénombrable*, et nous écrirons $\mathrm{F} \varepsilon \mathrm{B}$, s'il exsiste une suite infinie $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ de fonctions d'une variable réelle (pas nécessairement appartenant à F), telle que toute fonction de la famille F est limite d'une suite extraite de la suite $f_1, f_2, \ldots$.

Or, désignons par F_g, F_h, F_u respectivement les familles de toutes les fonctions qui sont limites de suites infinies non décroissantes, resp. non croissantes, resp. uniformément convergentes de fonction de la famille F. On a les théorèmes suivants:

1) *Si* $\mathrm{F} \varepsilon \mathrm{B}$, *on a* $\mathrm{F}_g \mathrm{F}_h \varepsilon \mathrm{B}$.

2) *Si* $\mathrm{F} \varepsilon \mathrm{B}$, *on a* $\mathrm{F}_u \varepsilon \mathrm{B}$.

On ne sait pas s'il existe une base dénombrable pour la famille de toutes les fonctions *ul* (de W. H. YOUNG) d'une variable réelle (c. à. d. pour la famille de toutes les fonctions qui sont limites de suites non décroissantes de fonctions semi-continues supérieurement). En généralisant un théorème de M. C. BURSTIN je démontre qu'il n'existe

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Armellini il 5 maggio 1940.

aucune base dénombrable pour cette famille qui soit formée de fonctions mesurables.

Je démontre ensuite ce théorèmes:

3) *S'il exsiste une base dénombrable pour la famille de toutes les fonctions* ul *d'une variable réelle, il exsiste aussi une base dénombrable pour la famille de toutes les fonctions d'une variable réelle d'une classe* α *de Baire donnée quelconque* ($\alpha < \Omega$).

4) *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille* F *de fonctions d'une variable réelle admette une base denombrable est qu'il existe une fonction* $\varphi(x)$ *d'une variable réelle, telle que toute fonction de la famille* F *soit de la forme* $g(\varphi(x))$, *où* g *est une fonction qui est sur l'ensemble* E *de toutes les valeurs de* $\varphi(x)$ *pour* x *réels limite d'une suite infinie de polynômes.*

5) *Si une famille* F *de fonctions d'une variable réelle admet une base dénombrable, il existe une fonction* $\varphi(x)$ *d'une variable réelle, telle que la famille de toutes les fonctions* $p(\varphi(x))$, *où* p *sont des polynômes aux coefficients rationnels, est une base dénombrable pour la famille* F.

Les démonstrations de ces théorèmes paraîtront dans le journal *Fundamenta Mathematicae.*